中国人民大学经济学院工作论文系列

School of Economics, Renmin University of China

Working Paper Series

递归效用、资产定价与利率期限结构*

陈彦斌

SERUC Working Paper no.200601002

Recursive Utility, Asset Pricing, and The Term Structure of Interest Rate

Chen Yanbin

SERUC Working Paper no.200601002

* 本文得到国家自然科学基金资助（项目号：70373018，70403020）。

中文摘要：递归效用函数分离了投资者的相对风险规避系数和跨期替代弹性系数，因此推广了传统的时间可分、状态可分的 CRRA 效用函数。本文建立了基于递归效用函数的连续时间一般均衡资产定价模型，并用来研究递归效用对资产价格和利率期限结构的影响。通过假定独立同分布的经济，本文还给出了资产价格和利率期限结构的显示解。本文的研究表明，使用递归效用函数可以得到更加灵活的无风险利率模型和利率期限结构模型。

关键词：递归效用函数 资产定价 利率期限结构 几何布朗运动 市场组合

递归效用、资产定价与利率期限结构*

陈彦斌
（中国人民大学经济学院 100872）

内容提要：递归效用函数分离了投资者的相对风险规避系数和跨期替代弹性系数，因此推广了传统的时间可分、状态可分的CRRA效用函数。本文建立了基于递归效用函数的连续时间一般均衡资产定价模型，并用来研究递归效用对资产价格和利率期限结构的影响。通过假定独立同分布的经济，本文还给出了资产价格和利率期限结构的显示解。本文的研究表明，使用递归效用函数可以得到更加灵活的无风险利率模型和利率期限结构模型。

关键词：递归效用函数 资产定价 利率期限结构 几何布朗运动 市场组合

一、引言

投资者有两种不同的规避行为，一种是对期内风险的规避，而另一种则是对跨期消费波动的规避。然而，在经济学中普遍使用的 CRRA 效用函数中，投资者的相对风险规避系数等于跨期替代弹性系数的倒数，没有将这两种行为区分开来。Epstein 和 Zin（1989，1991）和 Weil（1989，1990）在 Kreps 和 Porteus（1978）的理论框架基础之上提出了更加灵活的递归效用函数[1]，推广了传统的时间可分、状态可分效用函数。递归效用函数中的相对风险规避系数和跨期替代弹性系数分别由两个独立参数刻画，不再互为倒数，从而将风险规避和跨期替代两种不同行为区分开来。

引入递归效用函数的主要作用在于通过分解投资者的跨期替代和风险规避两种不同的行为，从而可以建立更加灵活的资产定价模型。如果所有的资产收益率都服从独立同分布的正态分布，那么资产的溢价等于相对风险规避系数乘以资产的消费风险（Weil，1989）。因此，可以采用足够大的相对风险规避系数来解释股票溢价之谜，而没有遭遇无风险利率之谜（Lucas，2003）。

将递归效用函数应用于资产定价领域的研究工作很多。这些研究工作主要集中在如下几个方面：研究股票溢价之谜和无风险利率之谜（Weil，1989；Campbell，1999），资产定价模型（Smith，2001；Seckin，2000；Campbell，1993；Restoy 和 Weil，1998，Duffie 和 Epstein，1992），最优消费和最优投资组合（Svensson，1989；Weil，1990；Dumas、Uppal 和 Wang，2000；Schroder 和 Skiadas，1999；杨云红和邹恒甫，2001），情绪波动（陈彦斌，2005）。但是，至今还没有人研究基于递归效用函数的连续时间一般均衡资产定价模型[2]，而这正是本文的研究目标。

只有在一般均衡模型中才能系统地研究递归效用函数对资产定价的影响。在一般均衡模型中，投资者效用最大化，并且各个市场实现均衡（商品市场出清和各个资产市场出清）。因此，投资者的消费和资产的价格或者收益率是内生决定的：投资者的最优决策行为，不但决定了他的消费水平和资产持有的投资组合，而且决定了各个资产的价格。因此，将递归效用函数引入资产定价理论必须研究它对经济中所有资产价格的影响。第一，给出所有资产的期望收益率与风险之间的资本资产定价模型。第二，根据股票所承诺的未来红利流，给出股票价格。第三，给出短期无风险债券的价格，或者短期无风险利率。第四，给出长期无风险债券的均衡价格，即利率期限结构。局部均衡模型将无风险利率视为给定的常数，因此只能研究前面两者[3]，无法研究后面两者。

在连续时间情况下研究递归效用函数对利率期限结构的影响比在离散时间情况下更加方便。首先，虽

---

* 本文得到国家自然科学基金资助（项目号：70373018，70403020）。

[1] 递归效用函数（Recursive utility function），也称为递归偏好（Recursive preference）、广义等弹性偏好（Generalized isoelastic preference）、随机微分效用（Stochastic differential utility）和非期望效用函数（Non-expected utility function）。Tallarini（2000）的风险敏感偏好（Risk-sensitive preference）也是一种特殊的递归效用函数，其中的跨期替代弹性系数等于 1。

[2] 相对而言，研究连续时间下的局部均衡资产定价模型和离散时间下的一般均衡模型都比较容易，而研究连续时间下的一般均衡模型则比较复杂。

[3] 这项工作 Campbell（1993）、Smith（2001）和 Restoy 和 Weil（1998）已经完成了。

然在离散时间情况下易于构造一般均衡模型并计算无风险利率和利率期限结构，但是难于处理引入市场组合后的利率期限结构。其次，引入递归效用函数后，资产定价模型中引入了市场组合和投资者的财富。因此，资产不但存在消费风险，而且还存在财富风险和市场风险。在连续时间模型中，可以非常方便地研究这几种风险之间的关系。

本文的安排如下。第二节描述了具有递归效用函数的投资者所处的交换经济，并将市场组合引入了投资者的预算约束方程。第三节使用投资者的消费－投资组合模型的 Euler 方程证明了均衡中的资产定价模型、无风险利率模型以及利率期限结构的一般模型。第四节通过进一步假定股票的红利服从几何布朗运动，求得了利率期限结构的显示解，并说明了引入递归效用函数对均衡资产定价和利率期限结构的影响。第五节是结论。

二、经济

考虑一个代表性投资者禀赋经济。经济中的消费品容易腐坏，必须即时消费。本文的经济类似于Lucas（1978），Mehra和Prescott（1985）和Bakshi和Chen（1996）所研究的经济。

1、偏好

时间是离散的，时间间隔为Δt。经济中存在大量的具有相同偏好的无限存活的投资者。代表性的投资者使用t时的财富为W_t，所得到的最大期望终身总效用为值函数$V(W_t)$，由如下方程递归给出

$$V(W_t)=\left\{(1-e^{-\rho\Delta t})c_t^{1-\gamma}+e^{-\rho\Delta t}\left[E_tV(W_{t+\Delta t})\right]^{\frac{1-\gamma}{1-\alpha}}\right\}^{\frac{1-\alpha}{1-\gamma}}, \tag{1}$$

此处E_t是条件期望算子，ρ是时间偏好参数，c_t是投资者在时间区间$[t,t+\Delta t)$的消费流，α是相对风险厌恶系数（Relative Risk Aversion，简称RRA），$1/\gamma$是跨期替代弹性（Intertemporal Elasticity of Substitution，简称IES）。α和γ是两个独立参数。如果$\alpha=\gamma$，那么递归效用函数（1）就退化为常数相对风险规避系数型的效用函数。

2、资产市场

经济中有$n+2$种公开交易的资产：Lucas树（股票）、债券和n种金融资产。各个资产详细定义如下。

经济中的每一个投资者在初始时刻，都被赋予一棵Lucas树。Lucas树是经济中唯一的生产技术，果实是经济中消费品的唯一来源。Lucas树可以永久存在，但是果实容易腐烂，必须在当期消费。如果将Lucas树理解为股票，那么Lucas树的果实则为红利。每棵Lucas树的价格为P_t，其红利D_t服从如下随机过程

$$\frac{\Delta D_t}{D_t}=\mu_{D,t}\Delta t+\sigma_{D,t}\Delta B_{D,t}, \tag{2}$$

此处$\Delta D_t\equiv D_{t+\Delta t}-D_t$表示红利的增长部分，$\Delta D_t/D_t$表示红利的增长率，$\mu_{D,t}$和$\sigma_{D,t}$分别是单位时间内红利增长率的条件均值和标准差，$B_{D,t}$是标准布朗运动。

经济中的无风险资产是债券。t时发行的无风险债券在$t+\Delta t$时到期，并回报一单位的消费品。无风险债券在t时的即时净利率记为r_t。

经济中还存在n种金融风险资产。假定每份风险资产i的t时价格（包括该资产所付红利）为$P_{i,t}$，服从如下的随机过程

$$\frac{\Delta P_{i,t}}{P_{i,t}}\equiv\frac{P_{i,t+\Delta t}-P_{i,t}}{P_{i,t}}=\mu_{i,t}\Delta t+\sigma_{i,t}\Delta B_{i,t}, \tag{3}$$

此处 $\mu_{i,t}$ 和 $\sigma_{i,t}$ 分别是风险资产 i 的单位时间内的收益率的条件均值和标准差，依赖于 t 时经济的状态，$B_{i,t}$ 是标准布朗运动。

3、预算约束方程

设代表性投资者在 $[t,t+\Delta t)$ 期初持有 s_t 棵Lucas树，价值为 $L_t/(1+r_t)$ 的债券，持有 $h_{i,t}$ 份风险资产 i。那么投资者的预算约束方程为

$$W_t = c_t\Delta t + P_t s_t + \frac{L_t}{1+r_t\Delta t} + \sum_{i=1}^n h_{i,t}P_{i,t}$$

$$W_{t+\Delta t} = (P_{t+\Delta t} + D_{t+\Delta t}\Delta t)s_t + L_t + \sum_{i=1}^n h_{i,t}P_{i,t+\Delta t}$$

将预算约束方程写为财富动态方程就可以引入市场组合。设投资者将其消费后的剩余财富投资于 $n+2$ 种资产的投资组合比例分别为 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+2}$，并满足 $\omega_1+\cdots+\omega_{n+2}=1$。那么有

$$(W_t - c_t\Delta t)\omega_{n+1} = P_t s_t\text{，}(W_t - c_t\Delta t)\omega_{n+2} = \frac{L_t}{1+r_t\Delta t}\text{和}(W_t - c_t\Delta t)\omega_i = h_{i,t}P_{i,t}\text{，}i=1,\ldots,n$$

将之代入投资者的 $t+\Delta t$ 时预算约束方程，得到

$$\begin{aligned}W_{t+\Delta t} &= \sum_{i=1}^n \frac{h_{i,t}P_{i,t+\Delta t}}{h_{i,t}P_{i,t}} h_{i,t}P_{i,t} + \frac{(P_{t+\Delta t}+D_{t+\Delta t}\Delta t)s_t}{P_t s_t}P_t s_t + \frac{L_t}{L_t/(1+r_t\Delta t)}\frac{L_t}{1+r_t\Delta t} \\ &= (W_t - c_t\Delta t)[\sum_{i=1}^n \frac{P_{i,t+\Delta t}}{P_{i,t}}\omega_i + \frac{(P_{t+\Delta t}+D_{t+\Delta t}\Delta t)}{P_t}\omega_{n+1} + (1+r_t\Delta t)\omega_{n+2}] \\ &= (W_t - c_t\Delta t)[1+\sum_{i=1}^n \omega_i\frac{\Delta P_{i,t}}{P_{i,t}} + \omega_{n+1}\frac{\Delta P_t + D_{t+\Delta t}\Delta t}{P_t} + \omega_{n+2}r_t\Delta t]\end{aligned}$$

可以将代表性投资者所投资的 $n+2$ 种资产视为市场组合[4]，市场组合指数 $P_{m,t}$ 服从如下随机过程

$$\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}} = \mu_{m,t}\Delta t + \sigma_{m,t}\Delta B_{m,t}$$

因此，投资者的预算约束方程可以表示为其财富的动态方程

$$W_{t+\Delta t} = (W_t - c_t\Delta t)(1+\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}}) \tag{4}$$

三、均衡资产定价模型

本节求解投资者的消费－投资组合问题，并给出一般均衡 Euler 方程。然后使用 Euler 方程证明均衡中的资产定价模型、无风险利率模型以及利率期限结构的一般模型。

1、均衡 Euler 方程

均衡中的资产价格使得投资者效用最大化，并且各个市场出清。一方面，对于产品市场。由于经济中投资者的人数等于Lucas树的棵数，而各个投资者是相同的。所以，在均衡中每个投资者持有一棵Lucas树，即 $s_t=1$。而又由于树所产生的果实必须在当期消费，那么有 $c_t=D_t$。另一方面，对于债券市场和风险资产市场。所有投资者所持有的债券之和为0，即 $L_t = 0$；所有投资者所持有的第i种风险资产之和为0，即 $h_{i,t}=0$。投资者的状态变量为财富，控制变量则是所持有的各种资产的数量，即债券数量和树的棵数，以

[4] 值得注意的是，经济学中经常将股票理解为整个股票市场。由于市场组合包含了股票或者股票市场在内，所以股票市场的指数，如 S&P500 等，并不能当作市场组合指数。

及各种金融风险资产的份数。使用随机动态规划可以得到如下Euler方程，

$$E_t\left\{\left[e^{-\rho\Delta t}\left(\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right]^{\frac{1-\alpha}{1-\gamma}}\left(1+\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\gamma}-1}\left(1+\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}}\right)\right\}=1 \tag{5}$$

Euler 方程的求取过程参见 Weil（1989）。均衡中的最优消费等于 Lucas 树的红利，但是本文为了记号简便，仍然写作消费符号。

2、资产定价模型

下面的定理 1 证明了基于递归效用函数的资产定价模型，根据股票所带来的未来红利流给出了股票的均衡价格。

定理 1：在连续时间极限中，风险资产的均衡风险溢价和股票价格为

（i）包括股票在内的任何资产的期望风险溢价满足

$$\mu_{j,t}-r_t=\gamma\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\sigma_{jc,t}+(1-\frac{1-\alpha}{1-\gamma})\sigma_{jm,t} \tag{6}$$

其中 $\sigma_{jc,t}=\mathrm{cov}_t(dP_{j,t}/P_{j,t},dc_t/c_t)/dt$ 和 $\sigma_{jm,t}=\mathrm{cov}_t(dP_{j,t}/P_{j,t},dP_{m,t}/P_{m,t})/dt$ 分别是资产收益率与投资者的最优消费增长率和市场组合收益率的条件协方差，分别度量该资产的消费风险和市场风险。

（ii）股票的价格为

$$P_t=E_t\left\{\int_t^{\infty}e^{-\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}(s-t)}(\frac{c_s}{c_t})^{-\gamma\frac{1-\alpha}{1-\gamma}}(\frac{P_{m,s}}{P_{m,t}})^{\frac{1-\alpha}{1-\gamma}-1}D_s ds\right\} \tag{7}$$

证明：(i) 定义记号 $\Delta c_t=c_{t+\Delta t}-c_t$。由于 Euler 方程（5）对无风险资产也成立，所以将方程（5）减去相应无风险资产的方程，并消除 t 时可测的系数，得到

$$E_t\{(1+\frac{\Delta c_t}{c_t})^A(1+\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})^B(\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}}-r_t\Delta t)\}=0$$

其中常数 $A=-\gamma\frac{1-\alpha}{1-\gamma}$，$B=\frac{1-\alpha}{1-\gamma}-1$。进行泰勒展开，得到

$$E_t\{[1+A\frac{\Delta c_t}{c_t}+\frac{A(A-1)}{2}(\frac{\Delta c_t}{c_t})^2][1+B\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}}+\frac{1}{2}B(B-1)(\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})^2](\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}}-r_t\Delta t)\}=o(\Delta t)$$

合并，并忽略 Δt 的高阶无穷小，得到

$$E_t\{(1+A\frac{\Delta c_t}{c_t}+B\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})(\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}}-r_t\Delta t)\}=0$$

因此，得到风险资产的期望超额收益率为

$$E_t(\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}}-r_t\Delta t)=-E_t[(A\frac{\Delta c_t}{c_t}+B\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})(\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}}-r_t\Delta t)]=-\mathrm{cov}_t(A\frac{\Delta c_t}{c_t}+B\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}},\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}})$$

其中第二个等号使用了协方差分解公式和期望的乘积是高阶无穷小。令 $\Delta t\to 0$，时间间隔无穷小，从而是连续时间，那么有 $\mu_{j,t}-r_t=-A\sigma_{jc,t}-B\sigma_{jm,t}$。

（ii）在均衡 Euler 方程（5）中使用均衡条件 $c_t = D_t$，并注意到股票的收益率等于下一期的价格加上红利除以此期的价格。由于股票的此期价格是 t 时可测的，所以得到

$$P_t = E_t[e^{-\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})^B(D_{t+\Delta t}\Delta t + P_{t+\Delta t})],$$

其中 $\rho' = \rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}$。因此，

$$P_t = E_t[e^{-\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})^B D_{t+\Delta t}\Delta t] + E_t[e^{-\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})^B P_{t+\Delta t}]$$

$$= E_t[e^{-\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})^B D_{t+\Delta t}\Delta t]$$

$$+ E_t\{e^{-\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})^B E_{t+\Delta t}[e^{-\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+2\Delta t}}{c_{t+\Delta t}})^A(\frac{P_{m,t+2\Delta t}}{P_{m,t+\Delta t}})^B(D_{t+2\Delta t}\Delta t + P_{t+2\Delta t})]\}$$

利用迭代期望法则（The law of iterated expectations）， $E_t[E_{t+\Delta t}(\cdot)] = E_t[\cdot]$，并化简，有

$$P_t = E_t[e^{-\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})^B D_{t+\Delta t}\Delta t] + E_t[e^{-2\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+2\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+2\Delta t}}{P_{m,t}})^B D_{t+2\Delta t}\Delta t]$$

$$+ E_t[e^{-2\rho'\Delta t}(\frac{c_{t+2\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+2\Delta t}}{P_{m,t}})^B P_{t+2\Delta t}]$$

不断递推，得到，

$$P_t = E_t[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\rho' j\Delta t}(\frac{c_{t+j\Delta t}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+j\Delta t}}{P_{m,t}})^B(D_{t+j\Delta t}\Delta t)] + \lim_{T\to\infty} e^{-\rho' T}E_t[(\frac{c_T}{c_t})^A(\frac{P_{m,T}}{P_{m,t}})^B P_T]$$

其中 $\lim_{T\to\infty} e^{-\rho' T}E_t[(\frac{c_T}{c_t})^A(\frac{P_{m,T}}{P_{m,t}})^B P_T]$ 为资产泡沫（Bubble）。在均衡中，资产泡沫等于0（参见Ljungqvist和Sargent（2000）第237页）。证明结束。□

定理 1 在连续时间下的一般均衡模型中再现了基于递归效用函数资产定价模型，所得到的结果与 Campbell（1993）的离散时间一般均衡模型和 Smith 的连续时间局部均衡模型是相同的。方程（6）指出，任何资产的风险溢价依赖于该资产的消费风险[5]和市场风险。方程（6）是资产定价的两因素模型，同时具有 CCAPM 模型和 CAPM 模型的特征[6]。在 CCAPM 模型中，消费风险是决定资产的均衡收益的唯一风险来源。在 CAPM 模型中，市场风险是决定资产的均衡收益的唯一风险来源。如果递归效用函数退化为 CRRA 效用函数，令 $\alpha=\gamma$，那么方程（6）就退化为 Breeden 的 CCAPM 模型。有两种方法可以将方程（6）理解为静态的 CAPM 模型。一种方法是当 α 等于 1 时，资产的风险溢价等于其市场风险（Smith，2001）；另外一种方法是当 γ 等于 0 时，投资者的跨期替代弹性等于无穷大，资产的风险溢价只与市场风险有关。

在连续时间极限中，资产的市场风险就是该资产的财富风险。在投资者的预算约束方程两边除以现在的财富，可以得到财富增长率与市场组合的关系为

$$\frac{W_{t+\Delta t}}{W_t} = (1 - \frac{c_t\Delta t}{W_t})(1 + \frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})$$

定义记号 $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$，将财富增长率代入资产收益率与财富增长率的条件协方差，得到

[5] 由于在均衡中，投资者的最优消费等于股票的红利，所以代表性投资者的消费风险，就是经济中的生产风险（Production risk）。

[6] 基于递归效用函数的资产定价模型具有 CCAPM 和 CAPM 模型的特征，并不等于说是两类模型的简单相加。在方程（6）中，消费风险和市场风险是彼此依赖，无法严格区分（Restoy 和 Weil，1998）。后面将会证明资产的市场风险等于财富风险，并且在几何布朗运动的经济中，投资者的消费占财富的比例是时间不变的常数。因此，消费风险会完全等同于市场风险。

$$\operatorname{cov}_t(\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}},\frac{\Delta W_t}{W_t})=\operatorname{cov}_t[\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}},(1-\frac{c_t\Delta t}{W_t})(1+\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})-1]=(1-\frac{c_t\Delta t}{W_t})\operatorname{cov}_t(\frac{\Delta P_{j,t}}{P_{j,t}},\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})$$

其中第二个等号消除了常数，并提出 t 时可测的量。方程两边令时间间隔趋向于无穷小，并在方程两边除以时间微分，便得到$\sigma_{jm,t}=\sigma_{jW,t}$，其中$\sigma_{jW,t}=\operatorname{cov}_t(dP_{j,t}/P_{j,t},dW_t/W_t)/dt$是资产收益率与投资者的财富增长率的条件协方差，度量资产的财富风险。因此，将方程（6）中的市场风险替换为财富风险，就可以得到 Smith 的基于财富的资产定价模型[7]。

本文通过引入递归效用函数而得到的基于财富的资产定价模型和 Bakshi 和 Chen 的基于财富偏好的资产定价模型，都是两因素模型：资产的风险溢价依赖于其消费风险和财富风险。虽然两类模型形式相同，但是内在机制完全不同。在 Bakshi 和 Chen 的模型中，投资者的消费和财富都是其效用函数中的变量，那么投资者不但关心其消费的波动，也关心其财富的波动。因此，投资者持有风险资产，不但对冲资产的消费风险，而且对冲资产的财富风险。

方程（7）指出，股票的价格等于所有未来的红利收入的总折现值。虽然投资者偏好是递归的，但是仍然是理性的。因而，在均衡中，股票的价格由其所承诺的未来红利决定，而不存在资产泡沫。在方程（7）中令$\alpha=\gamma$，那么股票价格等于$E_t\int_t^\infty e^{-\rho(s-t)}(c_s/c_t)^{-\alpha}D_s ds$，这是所熟悉的结论。

3、无风险利率和利率期限结构

折现债券（discount bond）在 t 时的价格记为$b(t,\tau)$，该债券在$t+\tau$时到期，并承诺付给持有者1单位的消费品。折现债券是长期的无风险资产。下面将使用折现债券研究基于递归效用函数的无风险利率和利率期限结构。主要结果反映在定理2中。

定理 2：在连续时间极限，均衡的无风险利率和无风险折现债券的价格可以刻画为

（i）无风险利率是

$$r_t=\rho+\gamma\mu_{D,t}+\frac{1}{2}(\frac{1-\alpha}{1-\gamma}-1)\sigma_{m,t}^2-\frac{\gamma}{2}(\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\gamma+1)\sigma_{D,t}^2 \tag{8}$$

其中$\sigma_{Dm,t}=\operatorname{cov}_t(dD_t/D_t,dP_{m,t}/P_{m,t})/dt$是红利增长率与市场组合收益率的条件协方差。

（ii）折现债券的价格是

$$b(t,\tau)=e^{-\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\tau}E_t[(\frac{c_{t+\tau}}{c_t})^A(\frac{P_{m,t+\tau}}{P_{m,t}})^B] \tag{9}$$

证明：(i) 由于均衡 Euler 方程对无风险资产成立，所以有

$$E_t\{e^{-\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\Delta t}(\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t})^A(1+\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})^B\left(1+r_t\Delta t\right)\}=1$$

将 t 时可测的变量提出，并泰勒展开，得到

$$\left(1+r_t\Delta t\right)E_t\{[1+A\frac{\Delta c_t}{c_t}+\frac{A(A-1)}{2}(\frac{\Delta c_t}{c_t})^2][1+B\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}}+\frac{B(B-1)}{2}(\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})^2]\}=1+\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\Delta t+o(\Delta t)$$

化简，省略高阶无穷小，得到

$$\left(1+r_t\Delta t\right)E_t[1+A\frac{\Delta c_t}{c_t}+\frac{A(A-1)}{2}(\frac{\Delta c_t}{c_t})^2+B\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}}+\frac{B(B-1)}{2}(\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})^2+AB\frac{\Delta c_t}{c_t}\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}}]$$

[7] 方程（6）与 Smith 的资产定价模型的区别在于，Smith 的资产定价模型是局部均衡模型，无风险利率是外生给定的常数；而方程（6）是一般均衡资产定价模型，内生的无风险利率由投资者的最优消费和投资组合决定。

$$=1+\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\Delta t+o(\Delta t)$$

省略高阶无穷小，得到

$$E_t[1+A\frac{\Delta c_t}{c_t}+\frac{A(A-1)}{2}(\frac{\Delta c_t}{c_t})^2+B\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}}+\frac{B(B-1)}{2}(\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}})^2+AB\frac{\Delta c_t}{c_t}\frac{\Delta P_{m,t}}{P_{m,t}}]+r_t\Delta t=1+\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\Delta t$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，就得到

$$r_t=\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}-A\mu_{D,t}-B\mu_{m,t}-\frac{A(A-1)}{2}\sigma_{D,t}^2-\frac{B(B-1)}{2}\sigma_{m,t}^2-AB\sigma_{Dm,t}$$

对市场组合这个特殊资产的 Euler 方程同样实施上述过程，得到

$$0=\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}-A\mu_{D,t}-(B+1)\mu_{m,t}-\frac{A(A-1)}{2}\sigma_{D,t}^2-\frac{B(B+1)}{2}\sigma_{m,t}^2-A(B+1)\sigma_{Dm,t}$$

结合上述两个公式并化简，就得到所要的结果。

（ii）不妨设 $\tau=N\times(\Delta t)$，即时间区间 $[t,t+\tau]$ 可以分为 N 个间隔 Δt。由无红利的金融资产j的Euler方程，并递推有

$$c_t^AP_{m,t}^A=e^{-\rho'\Delta t}E_t[c_{t+\Delta t}^AP_{m,t+\Delta t}^A\frac{P_{j,t+\Delta t}}{P_{j,t}}]=e^{-\rho'\Delta t}E_t[e^{-\rho'\Delta t}E_{t+\Delta t}[c_{t+2\Delta t}^AP_{m,t+2\Delta t}^A\frac{P_{j,t+2\Delta t}}{P_{j,t+\Delta t}}]\frac{P_{j,t+\Delta t}}{P_{j,t}}]$$

利用期望迭代法则，并用同样的方法不断递推，可以得到

$$c_t^AP_{m,t}^A=e^{-2\rho'\Delta t}E_t[c_{t+2\Delta t}^AP_{m,t+2\Delta t}^A\frac{P_{j,t+2\Delta t}}{P_{j,t}}]=e^{-N\rho'\Delta t}E_t[c_{t+N\Delta t}^AP_{m,t+N\Delta t}^A\frac{P_{j,t+N\Delta t}}{P_{j,t}}]=e^{-\rho'\tau}E_t[c_{t+\tau}^AP_{m,t+\tau}^A\frac{P_{j,t+\tau}}{P_{j,t}}]$$

其中最后等号利用了事实 $N\times(\Delta t)=\tau$。现在将折现债券理解为一种资产，那么 $P_{j,t+\tau}=1,P_{j,t}=b(t,\tau)$，代入上式得到所要的结果。证明结束。□

与 Cox、Ingersoll 和 Ross（1985）相同的是，方程（8）中的无风险利率是一般均衡模型中的内生变量。但不同的是，无风险利率不但依赖于红利增长率的均值和方差，而且依赖于市场组合收益率的均值和方差，以及红利增长率与市场组合收益率的协方差。而且，由于红利增长率和市场组合收益率是时间可变的，所以无风险利率也是随时间而变化，不是固定的常数。如果递归效用函数退化为 CRRA 效用函数（$\alpha=\gamma$），那么方程（8）就退化为 $r_t=\rho+\alpha\mu_{D,t}-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\sigma_{D,t}^2$，其中只有红利增长率的均值和方差影响无风险利率。

方程（9）指出，t时的τ期折现债券的价格等于τ时后的1单位消费品在t时的折现值。在方程（9）中令$\alpha=\gamma$，那么该折现债券的价格等于 $e^{-\rho\tau}E_t(c_{t+\tau}/c_t)^{-\alpha}$。方程（9）与传统的模型的区别在于定价核中多了市场组合指数的增长率这一项。

四、独立同分布经济中的显示解

由于无法得到折现债券价格的显示解，所以很难定量分析参数α 和γ对折现债券价格的影响。本节在独立同分布（i.i.d.）经济中求取各个资产价格的显示解，并使用显示解考察分离投资者的相对风险规避系数和跨期替代弹性系数对资产价格的影响。

假定股票的红利 D_t 服从几何布朗运动，$dD_t/D_t=\mu_Ddt+\sigma_DdB_{D,t}$，即红利增长率的均值和标准差都是常数。因此，红利增长率是独立同分布的。由于均衡中投资者的最优消费等于红利，所以最优消费也服

从几何布朗运动。

可以使用猜测－验证方法证明，所有资产价格都服从几何布朗运动。不妨先假设市场组合指数服从几何布朗运动，$dP_{m,t}/P_{m,t}=\mu_m dt+\sigma_m dB_{m,t}$，从而红利增长率与市场组合收益率之间的协方差为常数，并记为σ_{Dm}。定理 3 将证明股票的价格－红利比为常数，从而股票价格服从几何布朗运动。由 Euler 方程（5）可知，各个金融风险资产的价格服从几何布朗运动。而由投资者的预算约束方程可知，市场组合收益率是经济中各个资产收益率的线性组合。因此，市场组合指数服从几何布朗运动。

1、参数α和γ的含义

下面将说明，在独立同分布经济中参数α和γ可以分别解释为投资者的相对风险规避系数和跨期替代弹性系数的倒数。

参数α是投资者的相对风险规避系数。Weil（1990）和 Smith 指出了当经济中的红利以及各个资产都服从几何布朗运动时，投资者的值函数是其财富的幂函数，幂指数为α。而相对风险规避系数则定义为负的财富乘以值函数的二阶导数除以值函数的导数。通过计算可以得知投资者的相对风险规避系数刚好等于参数α。

γ是投资者的跨期替代弹性系数的倒数。由于 Euler 方程（5）对任意资产成立，所以不妨取为市场组合，变形得到

$$E_t\{\exp[-\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\Delta t+A\ln\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t}+(B+1)\ln\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}}]\}=1。$$

由于投资者的最优消费等于股票的红利，所以也服从几何布朗运动。因此，$\ln(c_{t+\Delta t}/c_t)$和$\ln(P_{m,t+\Delta t}/P_{m,t})$服从正态分布。化简并取对数，得到

$$\begin{aligned}E_t(\ln\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t})&=\frac{\rho}{A}\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\Delta t-\frac{B+1}{A}E_t(\ln\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})-\frac{1}{2A}\mathrm{var}_t[A\ln\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t}+(B+1)\ln\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}}]\\&=-\gamma\Delta t+\frac{1}{\gamma}E_t(\ln\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})+\frac{\gamma}{2}\frac{\alpha-1}{\gamma-1}\mathrm{var}_t(\ln\frac{c_{t+\Delta t}}{c_t}-\frac{1}{\gamma}\ln\frac{P_{m,t+\Delta t}}{P_{m,t}})\end{aligned}$$

跨期替代弹性系数定义为，经济中利率水平增加 1 个单位时，投资者的消费增长率增加的幅度，即如下偏微分

$$\frac{\partial E_t[\ln(c_{t+\Delta t}/c_t)]}{\partial E_t[\ln(P_{m,t+\Delta t}/P_{m,t})]}=\frac{1}{\gamma}$$

因此，参数γ的含义是投资者的跨期替代弹性系数的倒数。

2、资产定价的显示解

在独立同分布经济中，投资者的最优消费占其财富的比例是时间不变的常数（Weil，1990 ；Smith，2001）。因此，可以推断投资者的最优消费增长率与财富增长率完全相同[8]。那么对任意的风险资产而言，其消费风险等于财富风险。而前面已经证明了不管是否独立同分布经济，均衡中资产的财富风险等于市场风险。因此，在独立同分布经济中，资产的消费风险、财富风险和市场风险都是相等的。将这个事实应用于定理 1，得到如下定理 3。

定理 3：在独立同分布经济中，均衡资产价格满足如下关系，

（i）任何资产的期望收益率满足如下资产定价模型

$$\mu_j-r_t=\alpha\sigma_{jc} \tag{10}$$

（ii）股票的价格和所服从的几何布朗运动分别为

[8] 显然：若 $c_t=KW_t$，K 为某常数，那么 $dc_t/c_t=dW_t/W_t$。

$$P_t = \frac{D_t}{G} \text{和} \frac{dP_t}{P_t} = \mu_D dt + \sigma_D dB_{D,t} \tag{11}$$

此处$G = \rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma} - (A+1)(\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2}) - B(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2}) - \frac{1}{2}[(A+1)^2\sigma_D^2 + B^2\sigma_m^2 + 2(A+1)B\sigma_{Dm}]$。

证明：(ii) 由于红利服从几何布朗运动，那么对$\ln D_l$使用 Ito 引理，有

$$d\ln D_l = \frac{dD_l}{D_l} + \frac{1}{2}[-(D_l)^{-2}]dD_l \cdot dD_l = \frac{dD_l}{D_l} - \frac{1}{2}\sigma_D^2 dl = (\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2})dl + \sigma_D dB_{D,l}$$

对上式进行随机积分，有

$$\int_t^s d\ln D_l = \int_t^s (\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2})dl + \int_t^s \sigma_D dB_{D,l}\ ,$$

方程左边等于$\ln D_s - \ln D_t$，方程右边等于$(\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2})(s-t) + \int_t^s \sigma_D dB_{D,l}$。左右两边相同，得到

$$D_s = D_t \exp[(\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2})(s-t) + \sigma_D \int_t^s dB_{D,l}]$$

同理可以得到

$$P_{m,s} = P_{m,t} \exp[(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2})(s-t) + \sigma_m \int_t^s dB_{m,l}]$$

因此，可以计算

$$E_t[e^{-\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}(s-t)}(\frac{D_s}{D_t})^{A+1}(\frac{P_{m,s}}{P_{m,t}})^B] = E_t\{e^{-\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}(s-t)+[(\mu_D-\frac{\sigma_D^2}{2})(s-t)+\sigma_D\int_t^s dB_{D,l}](A+1)+[(\mu_m-\frac{\sigma_m^2}{2})(s-t)+\sigma_m\int_t^s dB_{m,l}]B}\} = e^{-G(s-t)}$$

其中记号G如定理中所定义。因此，由定理 1 可知股票的价格－红利比等于

$$\frac{P_t}{D_t} = \int_t^\infty E_t[e^{-\rho\frac{1-\alpha}{1-\gamma}(s-t)}(\frac{D_s}{D_t})^{A+1}(\frac{P_{m,s}}{P_{m,t}})^B]ds = \int_t^\infty e^{-G(s-t)}ds = \frac{1}{G}$$

证明结束。□

方程（10）指出，资产的风险溢价等于投资者的相对风险规避系数乘以资产的消费风险[9]。这个结论与 CCAPM 模型相同，但是内涵完全不同。在 CCAPM 模型中，跨期替代弹性系数被约束为相对风险规避系数的倒数，由此而计算得到的数值不具有合理性。虽然由方程（10）计算得到的相对风险规避系数仍然等于资产的风险溢价除以资产的消费风险，但是不必约束等于跨期替代弹性系数的合理数值的倒数。因此，可以采用足够大的相对风险规避系数来解释股票溢价之谜，而没有遭遇无风险利率之谜（Lucas，2003）。

由方程（11）可知，股票的价格－红利比是时间不变的常数，从而股票价格与其红利具有相同的增长率。那么股票的收益率等于

$$\frac{dP_t}{P_t} + \frac{D_t dt}{P_t} = (\mu_D + G)dt + \sigma_D dB_{D,t}$$

是独立同分布的，并且与红利增长率具有相同的标准差，但均值不同。注意到股票的消费风险和市场风险均等于股票红利增长率的方差，不难验证股票的风险溢价也满足资产定价方程（10）。

方程（11）推广了已有的结果。如果递归效用函数退化为 CRRA 效用函数（$\alpha = \gamma$），那么方程（11）就退化为

[9] Weil（1989）在 i.i.d.的两资产经济中也得到了类似的结果，但所使用的是马氏链方法。

$$P_t = D_t / [\rho - (1-\alpha)(\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2}) - \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 \sigma_D^2]$$

其中市场组合收益率或者投资者的财富增长率对股票的价格没有影响。股票价格－红利比只与时间偏好参数、相对风险规避系数和红利增长率的均值和方差有关。如果进一步取投资者的相对风险规避系数等于 1，即为对数效用函数，那么得到 $P_t / D_t = 1/\rho$，即股票的价格－红利比等于时间偏好参数的倒数（Bakshi 和 Chen，1996）。

3、利率期限结构的显示解

在独立同分布经济中，可以求得均衡中无风险资产的价格，包括短期的无风险利率和长期的折现债券的价格。主要结果反映在定理 4 中。

定理 4：在独立同分布经济中，均衡的无风险利率和折现债券价格满足如下关系，

（i）无风险利率是

$$r_t = \rho + \gamma\mu_{D,t} + \frac{1}{2}(\frac{1-\alpha}{1-\gamma} - 1)\sigma_m^2 - \frac{\gamma}{2}(\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\gamma + 1)\sigma_D^2$$

（ii）折现债券的价格是

$$b(t,\tau) = \exp\left\{-\left[\rho + \gamma\mu_{D,t} + \frac{1}{2}(\frac{1-\alpha}{1-\gamma} - 1)\sigma_{m,t}^2 - \frac{\gamma}{2}(\frac{1-\alpha}{1-\gamma}\gamma + 1)\sigma_{D,t}^2\right]\tau\right\}$$

定理 4 指出，在独立同分布经济中，均衡的无风险利率和折现债券价格都与所处的时间无关，而只与资产的期限有关。在方程（12）中取$\alpha = \gamma$，就退化为 $b(t,\tau) = \exp\{-[\rho + (\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2})\alpha - \frac{1}{2}\sigma_D^2\alpha^2]\tau\}$。如果进一步取$\alpha$等于 1，即为对数效用函数，那么得到 Bakshi 和 Chen 的 $b(t,\tau) = \exp[-(\rho + \mu_D - \sigma_D^2)\tau]$。

五、结论与展望

本文在交换经济中建立了基于递归效用函数的连续时间一般均衡资产定价模型。本文的主要工作在于如下几点：第一，研究了将市场组合引入预算约束方程的微观机理；第二，比较系统地研究了资产的消费风险、生产风险、市场风险和财富风险等各种风险度量之间的关系；第三，给出了短期无风险利率方程和利率的期限结构，并在独立同分布经济中给出了利率期限结构的显示解。

本文的分析表明，引入递归效用函数可以建立更加灵活的资产定价模型和利率期限结构模型。这种灵活性体现在如下两个方面。首先，虽然包括股票在内的所有资产的风险溢价只与投资者的相对风险规避系数有关，但是投资者的相对风险规避系数和跨期替代弹性系数，对股票的价格－红利比、无风险利率和长期折现债券价格都有影响。其次，均衡的无风险利率模型和利率期限结构模型中，不但含有投资者的消费所服从的随机过程，还含有市场组合指数所服从的随机过程。从而模型具有更加丰富的动态行为。

本文的研究还可以进一步推进。本文虽然得到了一般化的利率期限结构，但是在独立同分布经济中所得到的利率期限结构的显示解，实际上是平坦的期限结构。因此，需要进一步研究向上倾斜的利率期限结构的显示解，这将需要使用更加复杂但符合实际资本市场的随机过程。这一工作将具有很大的难度，但也将充满极大的挑战性。

参考文献

Bakshi, Gurdip S., Zhiwu Chen, 1996, Inflation, Asset Prices, and the Term Structure of Interest Rates in Monetary Economies, *Review of Financial Studies*, vol. 9, 241-275.

Breeden, D. T., 1979, “An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities”, *Journal of Financial Economics*, 7, 265–296.

Campbell, John Y., 1993, Intertemporal Asset Pricing without Consumption Data, *American Economic Review*, vol. 83,497-512.

Campbell, John Y., 1999, Asset Prices, Consumption, and the Business Cycles, in *Handbook of Macroeconomics*, edited by J.B. Taylor and M. Woodford, Vol 1, Chapter 19.

Cox, John, Jonathan Ingersoll, and Stephen Ross, 1985, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, vol.53, pp. 385-408.

Duffie, Darrell., and L. Epstein, 1992, Asset Pricing with Stochastic Differential Utility, *Review of Financial Studies*, 5, 411-436.

Dumas, Bernard, Raman Uppal, and Tan Wang, 2000, Efficient Intertemporal Allocations with Recursive Utility, *Journal of Economic Theory*, vol. 93, 240-259.

Epstein, Larry G., and Stanley E. Zin, 1989, Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption Growth and Asset Returns I: The Theoretical Framework, *Econometrica*, vol. 57(4), 937-69.

Epstein, Larry G., and Stanley E. Zin, 1991, Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior Of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis, *Journal of Political Economy*, vol. 99, 263–286.

Kreps, D.M., and E.L. Porteus, 1978, Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory, *Econometrica*, vol. 46, 185-200.

Ljungqvist, Lars and Thomas J. Sargent, 2000, *Recursive Macroeconomic Theory*, MIT Press.

Lucas, Robert E., Jr. 1978, Asset Prices in an Exchange Economy, *Econometrica*, vol. 46, 1429-1445.

Lucas, Robert E., Jr. 2003, Macro economic Priorities, *American Economic Review*, 93(1), 1-14.

Mehra, Rajnish and Edward Prescott, 1985, The Equity Premium: A Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, vol. 15 (2), 145-162.

Restoy, Fernando and Philippe Weil, 1998, Approximate Equilibrium Asset Prices, *NBER, Working Paper*, W6611

Smith, W.T., 2001, How Does the Spirit of Capitalism Affect Stock Market Prices? *The Review of Financial Studies*, vol.14 (4), 1215-1232.

Schroder, Mark and Costis Skiadas, 1999, Optimal Consumption And Portfolio Selection with Stochastic Differential Utility, *Journal of Economic Theory*, vol. 89, 68-126.

Seckin, Aylin, 2000, Habit Formation with Recursive Preferences, *Working Paper*

Svensson, L.E.O., 1989, Portfolio choice with non-expected utility in continuous time, Economics Letters, 30(4): 313-317.

Tallarini, Thomas, 2000, Risk-sensitive real business cycles, *Journal of Monetary Economics*, 45, 507-532.

Weil, Philippe, 1989, The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, vol. 24(3), 401-21.

Weil, Philippe, 1990, Nonexpected Utility in Macroeconomics, *Quarterly Journal of Economics*, vol. 105, 29-42.

杨云红，邹恒甫，2001：《社会地位、非期望效用函数、资产定价和经济增长》，《经济研究》第 10 期。

陈彦斌，徐绪松，2003：《基于风险基金的资本资产定价模型》，《经济研究》第 12 期。

陈彦斌，周业安，2004：《行为资产定价理论综述》，《经济研究》第 6 期。

陈彦斌，2005：《情绪波动和资产价格的波动》，《经济研究》第 5 期。